TURUNAN FUNGSI ALJABAR

MATEMATIKA UMUM

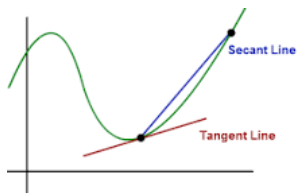
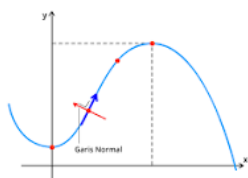
KELAS XI

PENYUSUN
YUYUN SRI YUNIARTI

SMA NEGERI 1 PEDES

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Garis Sekan (Secant Line) adalah **garis** lurus yang ditarik dari dua titik pada suatu kurva.

Garis normal merupakan **garis** yang melalui titik singgung dan tegak lurus dengan **garis** singgung.

garis singgung (disebut juga **garis tangen**) kurva bidang pada titik yang diketahui adalah garis lurus yang "hanya menyentuh" kurva pada titik tersebut.

Garis singgung kurva. Garis merah merupakan garis singgung kurva pada titik yang ditandai oleh titik merah.

Turunan :Pengukuran terhadap bagaimana fungsi berubah seiring perubahan nilai input, atau secara umum turunan menunjukkan bagaimana suatu besaran berubah akibat perubahan besaran lainnya.

f'(x) :Turunan pertama dari fungsi f(x)

Gradien : (bahasa Inggris: *gradient*) adalah salah satu operator dalam kalkulus vektor yang berguna untuk mencari perubahan arah dan kecepatan dalam bidang skalar, atau biasa disebut dengan kemiringan.

u(x) :Fungsi u

v(x) :Fungsi v

Titik Singgung : Titik persinggungan antara dua kurva

PETA KONSEP

Fungsi
Limit Fungsi
Turunan Fungsi
Sifat-sifat Turunan Fungsi
Menjelaskan Sifat-sifat turunan Fungsi
Menentukan Turunan Fungsi menggunakan sifat-sifat turunan fungsi

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	: Matematika Umum
Kelas	: XI
Alokasi Waktu	: 10 JP
Judul Modul	: Differensial

B. Kompetensi Dasar

3. 1 Menjelaskan sifat-sifat turunan fungsi aljabar dan menentukan turunan fungsi aljabar menggunakan definisi atau sifat- sifat turunan fungsi

4.1 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi aljabar

C. Deskripsi Singkat Materi

Turunan adalah pengukuran terhadap bagaimana fungsi berubah seiring perubahan nilai yang dimasukan, atau secara umum turunan menunjukkan bagaimana suatu besaran berubah akibat perubahan besaran lainnya. Proses dalam menemukan turunan disebut diferensiasi.

Terdapat berbagai pemanfaatan turunan dalam kehidupan sehari-hari, yaitu:

- Salah satu penerapan turunan yang paling umum adalah penentuan nilai maksimum dan minimum. Hal tersebut dapat diamati dengan seberapa sering kita mendengar atau membaca istilah keuntungan terbesar, biaya terkecil, kekuatan terbesar, dan jarak terjauh. Nilai balik maksimum suatu fungsi pada domain f dapat berupa nilai maksimum mutlak atau nilai maksimum relatif. Begitupun dengan nilai minimum, dapat berupa nilai minimum mutlak dan nilai minimum relatif. Jika dalam interval tertentu terdapat dua nilai maksimum atau lebih, nilai maksimum mutlak (absolut) adalah nilai tertinggi sedangkan yang lainnya merupakan nilai maksimum relatif, begitupun sebaliknya. Jika terdapat dua atau lebih nilai minimum pada suatu fungsi, maka titik terendah merupakan nilai minimum mutlak (absolut), sedangkan yang lainnya merupakan nilai minimum relatif.

- Turunan dapat digunakan untuk menentukan kecepatan dan percepatan sehingga sering digunakan dalam pekerjaan dan penelitian yang membutuhkan ilmu fisika. Selain itu percepatan juga digunakan dalam menghitung laju percepatan pada kegiatan lempar lembing, lempar cakram, menembak, dan lain – lain. Setiap waktu dan percepatannya mempunyai nilai yang dapat diketahui melalui fungsi turunan.
- Dalam membuat konstruksi bangunan, percampuran bahan bahan bangunan yang di lakukan oleh arsitek, pembuatan tiang – tiang, langit langit, ruangan, dan lain lain menggunakan turunan sehingga bangunan terlihat cantik dan kokoh (optimal). Pembuatan kapal, pesawat, dan kendaraan lainnya menggunakan turunan.
- Kegunaan penurunan,terdapat juga pada quick count. Dalam perhitungan tersebut,terdapat juga perhitungan yang baik sehingga dapat mempunyai perhitungan yang maksimal.

Dalam dunia penerbangan, turunan mempunyai fungsi terpenting untuk menentukkan laju pesawat dengan cepat. Pesawat akan mengikuti navigasi dari tower yang berada di bandara. Setiap laju pesawat akan terdeteksi pada navigasi (menggunakan perhitungan kalkulus otomatis) sehingga laju pesawat tidak salah arah dan percepatannya sesuai dengan panduan dari tower. (Brainly.co.id)

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Sebelum Ananda membaca isi modul, terlebih dahulu membaca petunjuk khusus dalam penggunaan modul agar memperoleh hasil yang optimal.

1. Sebelum memulai menggunakan modul, mari berdoa kepada Tuhan yang Maha Esa agar diberikan kemudahan dalam memahami materi ini dan dapat mengamalkan dalam kehidupan sehari-hari.
2. Sebaiknya Ananda mulai membaca dari pendahuluan, kegiatan pembelajaran, rangkuman, hingga daftar pustaka secara berurutan.
3. Setiap akhir kegiatan pembelajaran, Ananda mengerjakan latihan soal dengan jujur tanpa melihat uraian materi.

4. Ananda dikatakan tuntas apabila dalam mengerjakan latihan soal memperoleh nilai ≥ 75 sehingga dapat melanjutkan ke materi selanjutnya.
5. Jika Ananda memperoleh nilai < 75 maka Ananda harus mengulangi materi pada modul ini dan mengerjakan kembali latihan soal yang ada.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **2** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Menemukan Konsep Turunan Sebagai Limit Fungsi

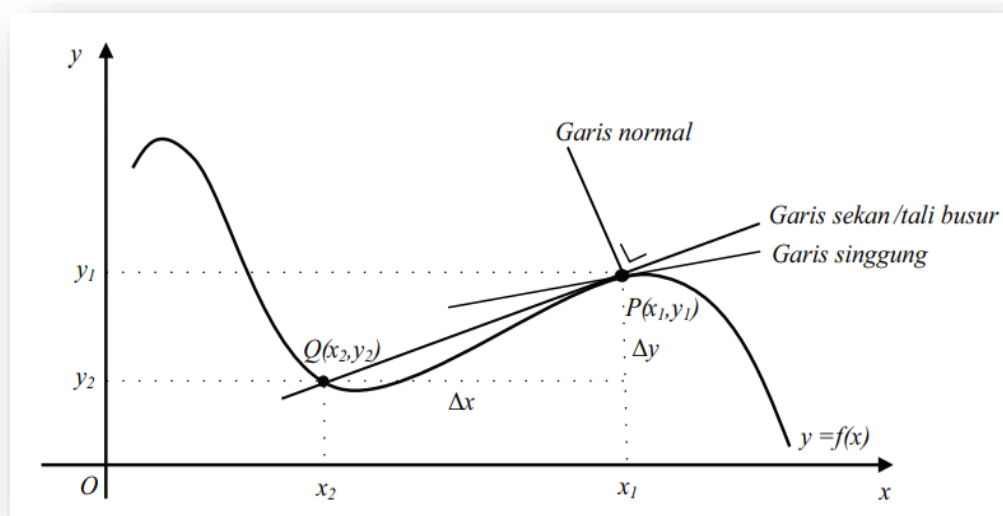
Kedua : Turunan Fungsi Aljabar

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
Menemukan Konsep Turunan

A. Tujuan Pembelajaran

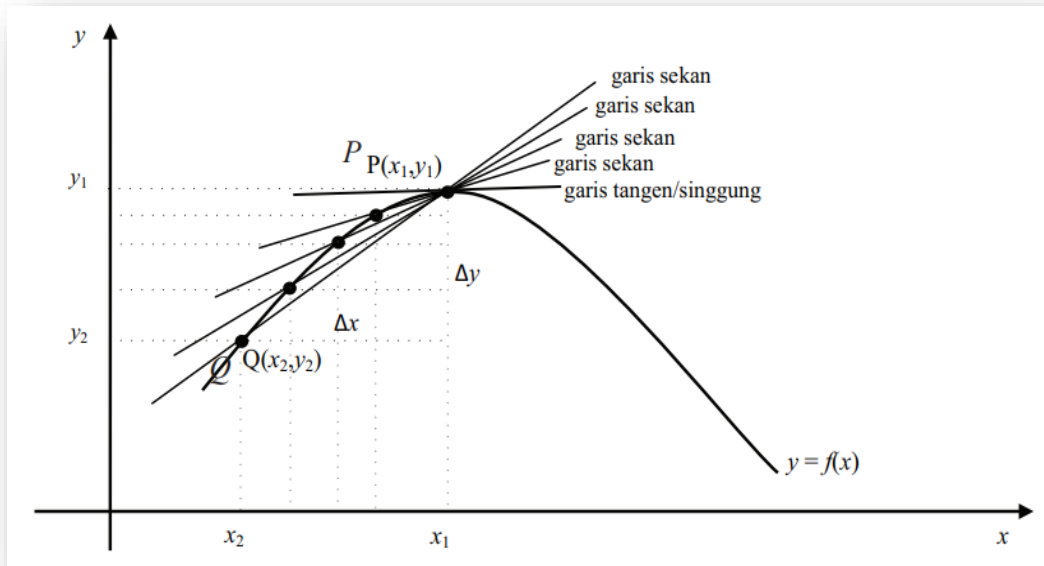
Pada pembelajaran kali ini, Ananda akan digiring untuk dapat menemukan konsep turunan secara mandiri. Selain itu juga Ananda akan diajak untuk dapat menentukan turunan fungsi aljabar mulai dari yang paling sederhana sampai ke yang kompleks. Namun tidak usah khawatir, dalam modul ini Ananda akan mempelajarinya secara bertahap untuk memungkinkan Ananda dapat mempelajarinya secara mandiri.

B. Uraian Materi

Untuk menemukan konsep turunan, kita akan mencoba mengamati berbagai permasalahan nyata dan mempelajari beberapa kasus dan contohnya. Kita akan memulainya dengan menemukan konsep garis tangen atau garis singgung. Sebagai ilustrasi perhatikan berikut:

Gambar 1

Misalkan seseorang yang sedang bermain papan seluncur bergerak dari titik Q (x_2, y_2) dan melayang ke udara pada titik P(x_1 , y_1) sehingga ia bergerak dari titik Q mendekati titik P. Garis yang menghubungkan titik Q (x_2 , y_2) dan titik P (x_1 , y_1) disebut tali busur atau garis sekan dengan kemiringan atau gradien $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (Ingat konsep garis lurus).

Jika Δx = $x_2 - x_1$ maka x_2 = Δx + x_1 (Δx merupakan selisih dari x) dan Jika Δy = $y_2 - y_1$ makan y_2 = Δy + y_1

Jika Δx semakin kecil maka Q akan bergerak mendekati P (Jika Δx → 0 maka Q → P).
Sehingga gambar grafiknya dapat diilustrasikan sebagai berikut:

Gambar 2

Jika y = f(x) maka gradien garis sekan PQ adalah:

$$m_{PQ} = \frac{f(x_2) + f\,(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x\,) - f(x_1)}{x_1 + \Delta x - x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x\,) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Dari persamaan tersebut, kita dapat menarik definisi:

Misalkan $f : R \rightarrow R$ adalah fungsi kontinu dan titik P (x_1, y_1) dan $Q\,(x_1 + \Delta x\,, y_1 + \Delta y)$ pada kurva f. Garis sekan menghubungkan titik P dan Q dengan gradien $m_{sec} = \frac{f\,(x_1 + \Delta x\,) - f\,(x_1\,)}{\Delta x}$

Kita kembali ke gambar kedua yuk, Ananda amati kembali bahwa jika titik Q mendekati P maka Δx → 0 sehingga diperoleh garis singgung di titik P dengan gradien :

$m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\,(x_1 + \Delta x\,) - f(x_1)}{\Delta x}$ jika limitnya ada, nahhh ini yang harus Ananda pahami tentang teori limit. Dari perhitungan matematis ini kita dapatkan definisi kedua mengenai gradien garis singgung yaitu sebagai berikut:

Misalkan f adalah fungsi kontinu bernilai real dan titik $P(x_1, y_1)$ pada kurva f. Gradien garis singgung di titik $P(x_1, y_1)$ adalah limit gradien garis sekan di titik $P(x_1, y_1)$, ditulis: $m_{GS} = \lim_{\Delta x \to 0} m_{\sec} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$. (Jika limitnya ada)

Contoh soal 1:

Tentukan gradien garis singgung kurva $f(x) = x^2 + 3x - 4$ di titik (2, 6)

Jawab :

$f(x) = x^2 + 3x - 4$

$f(2) = 2^2 + 3\,(2) - 4 = 4 + 6 - 4 = 6$

$f(2 + \Delta x\,) = (2 + \Delta x)^2 + 3\,(2 + \Delta x) - 4$

$= 4 + 4\Delta x + \Delta x^2 + 6 + 3\Delta x - 4 = \Delta x^2 + 7\Delta x + 6$

Menurut rumus : $m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x\,) - f(x_1)}{\Delta x}$

$$m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x\,) - f(2)}{\Delta x}$$

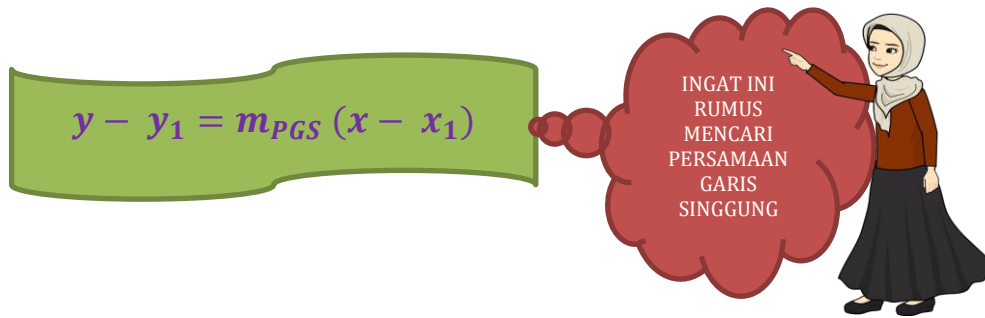
$$m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 + 7\Delta x + 6 - 6}{\Delta x}$$

$$m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 + 7\Delta x}{\Delta x}$$

$$m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{7\Delta x}{\Delta x}$$

$$m_{PGS} = 0 + 7 = 7$$

Jadi gradien garis singgung kurva $f(x) = x^2 + 3x - 4$ di titik (2, 6) sama dengan 7.

Bagaimana Ananda? Bisakah Ananda memahami bagaimana mencari gradien atau kemiringan suatu kurva dengan menggunakan konsep secan? Nahhh lanjut ke pelajaran berikutnya yaitu kita akan mengulas kembali persamaan garis singgung yang pernah Ananda pelajari waktu SMP. Ingat kembali bahwa rumus mencari persamaan garis kurva $y = f(x) di\ titik\ (x_1, y_1)$ yaitu :

Contoh soal 2:

Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = f(x) = x^2 + 4x \; di \; titik \; (-1, -3)$.

Jawab:

$f(x) = x^2 + 4x$

Langkah pertama kita cari dulu $f(-1) = (-1)^2 + 4(-1) = 1 - 4 = -3$

Kemudian cari $f(-1 + \Delta x) = (-1 + \Delta x)^2 + 4(-1 + \Delta x)$

$= (-1)^2 - 2\Delta x + \Delta x^2 - 4 + 4\Delta x = 1 - 2\Delta x + \Delta x^2 - 4 + 4\Delta x = \Delta x^2 + 2\Delta x - 3$

Maka di dapat :

$$m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 + 2\Delta x - 3 - (-3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 + 2\Delta x - 3 + 3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 + 2\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 0 + 2 = 2$$

Didapat gradien kurva tersebut = 2

Maka Persamaan garis singgung kurva $y = f(x) = x^2 + 4x \; di \; titik \; (-1, -3)$. Adalah

$$\boldsymbol{y - y_1 = m_{PGS}(x - x_1)}$$
$$\boldsymbol{y - (-3) = 2\,(x - (-1))}$$
$$\boldsymbol{y + 3 = 2\,(x + 1)}$$
$$\boldsymbol{y + 3 = 2x + 2}$$
$$\boldsymbol{y = 2x + 2 - 3}$$
$$\boldsymbol{y = 2x - 1}$$

Atau bentuk lainnya

$$\boldsymbol{y - 2x + 1 = 0}$$

C. Rangkuman

a. Definisi untuk mencari gradien atau kemiringan garis singgung adalah

Misalkan f adalah fungsi kontinu bernilai real dan titik $P(x_1, y_1)$ pada kurva f. Gradien garis singgung di titik $P(x_1, y_1)$ adalah limit gradien garis sekan di titik $P(x_1, y_1)$, ditulis: $m_{GS} = \lim_{\Delta x \to 0} m_{\sec} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$. (Jika limitnya ada)

b. Rumus untuk mencari persamaan garis singgung kurva

$$y - y_1 = m_{PGS}\,(x - x_1)$$

D. Latihan Soal

Kerjakan semua soal di bawah ini di kertas, kemudian cocokkan dengan kunci jawabannya.

1) Tentukan gradien garis singgung kurva $y = 2x^2 + 3x - 5$ di titik (2, 9)

   Jawab: m = 11

2) Gradien garis singgung kurva $y = x^3 - 2x$ di titik ((1 , -1)

   Jawab : m = 1

3) Persamaan garis singgung kurva $y = x^2 - 2x + 5$ di titik (- 1 , 8) adalah ...

   Jawab : $y + 4x - 4 = 0$

4) Persamaan garis singgung kurva $y = 3x^2 - 5$ di titik (- 2, 7) adalah ...

   Jawab : $y + 12x + 17 = 0$

5) Diketahui garis x + y = a menyinggung parabola $y = -\frac{1}{3}x^2 + x + 2$. Nilai a adalah ....

   Jawab: a = 5

Pembahasan

Nomor	Pembahasan	Skoring
1	Penyelesaian Diketahui kurva $y = 2x^2 + 3x - 5$ $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ $f(2) = 2(2)^2 + 3\,(2) - 5 = 8 + 6 - 5 = 9$ $f(2 + \Delta x) = 2(2 + \Delta x)^2 + 3\,(2 + \Delta x) - 5$ $= 2(4 + 4\Delta x + \Delta x^2) + 6 + 3\Delta x - 5$ $= 8 + 8\Delta x + 2\Delta x^2 + 6 + 3\Delta x - 5$ $= 2\Delta x^2 + 11\Delta x + 9$ Menurut rumus : $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x^2 + 11\Delta x + 9 - 9}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x^2 + 11\Delta x}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x^2}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{11\Delta x}{\Delta x}$ $m_{PGS} = 0 + 11 = 11$ Jadi gradien garis singgung kurva $f(x) = x^2 + 3x - 5$ di titik (2, 9) sama dengan 11.	20
2	Penyelesaian Diketahui kurva $y = x^3 - 2x$ dan titik (1, - 1) $f(x) = x^3 - 2x$ $f(1) = 1^3 - 2(1) = -1$ $f(1 + \Delta x) = (1 + \Delta x)^3 - 2(\Delta x)$ $= 1 + 3\Delta x + 3\Delta x^2 + \Delta x^3 - 2\Delta x$ $= \Delta x^3 + 3\Delta x^2 + \Delta x - 1$ Menurut rumus : $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x}$	20

	$m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x^3 + 3\Delta x^2 + \Delta x - 1 - (-1)}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x^3 + 3\Delta x^2 + \Delta x}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x^3}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{3\Delta x^2}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta x}$ $m_{PGS} = 0 + 0 + 1 = 1$ Jadi gradien garis singgung kurva $y = x^3 - 2x$ di titik $(1, -1)$ sama dengan 1	
3	Penyelesaian Diketahui kurva $y = x^2 - 2x + 5$ dan titik (- 1 , 8) $f(x) = x^2 - 2x + 5$ $f(-1) = (-1)^2 - 2(-1) + 5 = 1 + 2 + 5 = 8$ $f(-1 + \Delta x) = (-1 + \Delta x)^2 - 2(-1 + \Delta x) + 5$ $= (1 - 2\Delta x + \Delta x^2) + 2 - 2\Delta x + 5$ $= 1 - 2\Delta x + \Delta x^2 + 2 - 2\Delta x + 5$ $= \Delta x^2 - 4\Delta x + 8$ Menurut rumus : $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x^2 - 4\Delta x + 8 - 8}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x^2 - 4\Delta x}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x^2}{\Delta x} - \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{4\Delta x}{\Delta x}$ $m_{PGS} = 0 - 4 = -4$ Jadi gradien garis singgung kurva $y = x^2 - 2x + 5$ dan titik (- 1 , 8) sama dengan - 4. Persamaan garis singgungnya : $y - y_1 = m_{PGS}(x - x_1)$ $y - 8 = -4(x - (-1))$ $y - 8 = -4x - 4$ Atau $y = -4x - 4 + 8$ $y = -4x + 4$	20
	Penyelesaian Diketahui kurva $y = 3x^2 - 5$ di titik (- 2, 7)	

4	$f(x) = 3x^2 - 5$ $f(-2) = 3(-2)^2 - 5 = 12 - 5 = 7$ $f(-2 + \Delta x) = 3(-2 + \Delta x)^2 - 5$ $= 3(4 - 4\Delta x + \Delta x^2) - 5$ $= 3\Delta x^2 - 12\Delta x + 7$ Menurut rumus : $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(-2 + \Delta x) - f(-2)}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x^2 - 12\Delta x + 7 - 7}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x^2 - 12\Delta x}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x^2}{\Delta x} - \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{12\Delta x}{\Delta x}$ $m_{PGS} = 0 - 12 = -12$ Jadi gradien garis singgung kurva $y = 3x^2 - 5$ di titik (- 2, 7) sama dengan - 12. Persamaan garis singgungnya : $y - y_1 = m_{PGS}(x - x_1)$ $y - 7 = -12\ (x - (-2))$ $y - 7 = -12x - 24$ Atau $y = -12x - 24 + 7$ $y = -12x - 17$	20
5	Penyelesaian Diketahui garis x + y = a menyinggung parabola $y = -\frac{1}{3}x^2 + x + 2$. Nilai a adalah .... $x + y = a$ $y = a - x$ menyinggung parabola maka $y_1 = y_2$ $a - x = -\frac{1}{3}x^2 + x + 2$ $-\frac{1}{3}x^2 + x + 2 + x - a = 0$ $-\frac{1}{3}x^2 + 2x + 2 - a = 0$ $a = -\frac{1}{3}; b = 2; c = 2 - a$	20

	Karena menyinggung maka, D = 0 $D = b^2 - 4\,ac$ $D = (2)^2 - 4\,(-\frac{1}{3})(2 - a) = 0$ $4 + \frac{8}{3} - \frac{4}{3}a = 0$ $\frac{12}{3} + \frac{8}{3} - \frac{4}{3}a = 0$ $\frac{20}{3} - \frac{4}{3}a = 0$ $-\frac{4}{3}a = 0 - \frac{20}{3} = -\frac{20}{3}$ $a = -\frac{20}{3} \,.\, (-\frac{3}{4}) = 5$	
TOTAL SKOR		100

E. Penilaian Diri

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan jujur dan bertanggung jawab.

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Ananda telah mampu memahami definisi turunan ?		
2.	Apakah Ananda telah mampu memahami konsep gradien garis singgung?		
3.	Apakah Ananda telah mampu menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan turunan?		

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
SIFAT-SIFAT TURUNAN

A. Tujuan Pembelajaran

Pada pembelajaran kedua, Ananda akan dibimbing untuk dapat menggunakan sifat-sifat turunan yang telah Ananda peroleh pada kegiatan pembelajaran satu. Cara menentukan turunan pertama sebuah fungsi yang terdefinisi di $\mathbb{R}$ Ananda dapat menggunakan definisi turunan atau dapat juga menggunakan rumus umum turunan.

B. Uraian Materi

Konsep turunan merupakan salah satu dari bagian utama kalkulus. Konsep turunan ditemukan oleh **Sir Isaac Newton** (1642 – 1727) dan **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646 – 1716). Bahasa lain dari turunan adalah differensial yang merupakan tingkat perubahan dari suatu fungsi. Turunan dari fungsi $y = f(x)$ dituliskan dengan $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d(f(x))}{dx}$ (dibaca y aksen sama dengan f aksen x sama dengan $dy\, dx$ sama dengan $d\, f(x)\, dx$, ini dapat diartikan turunan pertama fungsi f terhadap x, atau turunan pertama y. Jika fungsinya dalam $a, f(a)$ maka $f'(a) merupakan\ turunan\ pertama\ f\ terhadap\ a$ dan seterusnya.

Definisi Turunan
Misal $f(x)$ merupakan fungsi yang terdefinisi di $\mathbb{R}$, turunan pertama dari fungsi tersebut didefinisikan sebagai limit dari perubahan rata-rata dari nilai fungsi terhadap variabel x dan ditulis sebagai:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Konsep ini merupakan dasar untuk menentukan turunan suatu fungsi. Atau definisi tersebut dapat dituliskan:

Definisi 1

Misalkan $f: S \to R$ dengan $S \subseteq R$. Fungsi f dapat diturunkan pada S jika dan hanya jika fungsi f dapat diturunkan di setiap titik c di S.

Atau jika terdapat titik c anggota R

Definisi 2

Misalkan fungsi $f: S \to R, S \subseteq R$ dengan $(c - \Delta x, c + \Delta x) \subseteq S$. Fungsi f dapat diturunkan di titik c jika dan hanya jika ada $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$.

Definisi 3

Misalkan fungsi $f: S \to R, S \subseteq R$ dengan $(c - \Delta x, c + \Delta x) \subseteq S$

- Fungsi f memiliki turunan kanan pada titik c jika dan hanya jika $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ ada.
- Fungsi f memiliki turunan kiri pada titik c jika dan hanya jika $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ ada.

Suatu fungsi akan dapat diturunkan pada suatu titik jika memenuhi sifat berikut:

Sifat turunan fungsi

Misalkan fungsi $f: S \to R, S \subseteq R$ dengan $x \in S$ dan $L \in R$. Fungsi f dapat diturunkan di titik x jika dan hanya jika turunan kiri sama dengan turunan kanan, ditulis,

$$f'(x) = L \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = L.$$

Keterangan:

1. $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ adalah turunan fungsi f di titik x yang didekati dari kanan pada domain S.
2. $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ adalah turunan fungsi f di titik x yang didekati dari kiri pada domain S.

Contoh Soal:

Dengan menggunakan konsep turunan, tentukan turunan pertama dari :

1. $f(x) = 10$

   Jawab:

   Karena $f(x) = 10$ merupakan fungsi konstan (tetap) maka $f(x + \Delta x) = 10\ (tetap)$

   $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10-10}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

2. $f(x) = 3x + 5$

   Jawab:

   $$f(x) = 3x + 5\ maka\ f(x+\Delta x) = 3\,(x+\Delta x) + 5 = 3x + 3\Delta x + 5$$

   $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x+\Delta x) + 5 - (3x+5)}{\Delta x}$$

   $$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x + 3\Delta x + 5 - 3x - 5}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 3 = 3$$

3. $f(x) = 5x^2 + 3$

   Jawab:

   $$f(x+\Delta x) = 5\,(x+\Delta x)^2 + 3 = 5\,(x^2 + 2x.\Delta x + \Delta x^2) + 3$$
   $$= 5x^2 + 10x.\Delta x + 5\Delta x^2 + 3$$

   $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
   $$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5x^2 + 10x.\Delta x + 5\Delta x^2 + 3 - (5x^2+3)}{\Delta x}$$
   $$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5x^2 + 10x\Delta x + 5\Delta x^2 + 3 - 5x^2 - 3}{\Delta x}$$
   $$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10x.\Delta x + 5\Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10x.\Delta x}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5\Delta x^2}{\Delta x}$$
   $$= \lim_{\Delta x \to 0} 10x + \lim_{\Delta x \to 0} 5\Delta x = 10x + 0 = 10x$$

   Sekarang marilah kita perhatikan ketiga contoh tersebut lalu kita tarik kesimpulan. Untuk contoh pertama, fungsi yang diberikan adalah fungsi konstan, menghasilkan turunan pertama sama dengan nol. Contoh soal kedua adalah fungsi linear menghasilkan turunan pertama koefisiennya, dan contoh soal ketiga adalah fungsi kuadrat, nahh perhatikan bahwa koefisien dari x pangkat dua adalah 5 dan pangkat dari x adalah 2, kalikan 5 dengan 2 didapat 5(2) = 10, hasil akhir berpangkat satu maka 2 – 1 = 1. Dari sini kita tarik kesimpulan bahwa:

- **Untuk fungsi konstan mempunyai bentuk umum $f(x) = c$, dengan c adalah konstanta bilangan Real.**

$$\text{Jika } f(x) = c; maka\ f'(x) = 0$$

- **Untuk fungsi linear mempunyai bentuk umum $y = ax + b$, dengan a dan b anggota bilangan Real.**

$$Jika\ f(x) = ax + b\ maka\ f'(x) = a$$

- **Untuk fungsi kuadrat mempunyai bentuk umum $y = ax^n$, dengan a anggota bilangan Real dan n pangkat/eksponen**

$$Jika\ f(x) = ax^n\ maka\ f'(x) = ax^{n-1}$$

Nahhh setelah Ananda merumuskan rumus umum turunan seperti di atas, maka dapat Ananda lihat untuk pengerjaan soal turunan dapat langsung menggunakan rumus tersebut.

Contoh. Tentukan turunan pertama dari

a) $y = 100$
   Jawab $y' = 0$

b) $y = 19x - 5$
   Jawab $y' = 19$

c) $y = 6x^3$
   Jawab : $y' = 6(3)^{3-1} = 18x^2$

d) $f(x) = 5\sqrt[3]{x^2}$
   Jawab: Untuk menjawab soal ini kita harus mengubah bentuk akar ke dalam bentuk pangkat pecahan.

$$f(x) = 5\sqrt[3]{x^2} = 5x^{\frac{2}{3}}$$

   Jadi Ananda punya koefisien = 5, pangkat = 2/3

$$\text{Maka } f'(x) = 5(\tfrac{2}{3})x^{\frac{2}{3}-1}$$

$$f'(x) = \frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}-\frac{3}{3}} = \frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{3\sqrt[3]{x}}$$

e) $f(x) = 2x - 15$
Jawab : Fungsi tersebut adalah fungsi linear maka $f'(x) = 2$

f) $f(x) = 2x^3 - 21x^2 - 12x + 10$
Jawab :
$f'(x) = 2(3)x^{3-1} - 21(2)x^{2-1} - 12(1)x^{1-1} + 0$
$f'(x) = 6x^2 - 42x - 12$

g) $f(x) = (2x + 3)(x^3 - 2x^2)$
Jawab:
Perhatikan bahwa soal ini merupakan perkalian dua fungsi berbeda, yaitu fungsi $2x + 3$ *dan* $x^3 - 2x^2$. Untuk menjawab soal ini Ananda dapat mengalikan satu persatu tiap komponen fungsi terlebih dahulu, ini tidak sulit karena masing-masing fungsi yang berada di dalam kurung berpangkat satu. Setelah dikalikan maka fungsi $f(x)$ menjadi:

$f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 3x^3 - 6x^2$
$f(x) = 2x^4 - x^3 - 6x^2$

Setelah ini baru kita turunkan
$f'(x) = 2(4)x^{4-1} - 1(3)x^{3-1} - 6(2)x^{2-1}$
$f'(x) = 8x^3 - 3x^2 - 12x$

Nahhh bagaimana setelah Ananda belajar sampai contoh terakhir ini..? mudah bukan mempelajari konsep turunan? Jadi kalo udah ketemu rumus umum turunannya, Ananda gak perlu lagi pakai konsep limit dalam mencari turunan pertama. Langsung aja pakai tuh rumusnya. Oke.. ?? semangattt...

ATURAN RANTAI

Ananda perhatikan contoh soal bagian g). Seandainya fungsi $f(x)$ tersebut berpangkat lebih dari dua, tentu akan repot bagi Ananda melakukan perkaliannya.

CONTOH SOAL 1. Tentukan turunan pertama dari :

$f(x) = (2x + 3)^3$
Nahh cara menyelesaikan soal ini Ananda memisalkan,
Misal: $u = 2x + 3$
Maka $u' = \frac{du}{dx} = 2$ → notasi leibniz
Fungsi di atas kita ganti dengan u sehingga:

$f(x) = u^3$
$f'(x) = 3\,u^2 \frac{du}{dx} = 3u^2\ (2) = 6u^2 = 6\,(2x + 3)^2$

CONTOH SOAL 2. Tentukan $f'(x)$ dari:
$f(x) = (3x-5)\sqrt[3]{4x-10}$

Jawab:

Misal $u = 3x-5$ $\quad\quad v = \sqrt[3]{4x-10} = (4x-10)^{\frac{1}{3}}$

$u' = 3$ $\quad\quad v' = \frac{1}{3}(4x-10)^{\frac{1}{3}-1}.(4) = \frac{4}{3}(4x-10)^{\frac{1}{3}-\frac{3}{3}}$

$= \frac{4}{3}(4x-10)^{-\frac{2}{3}}$

$f'(x) = u'v + uv'$

$f'(x) = 3\,.(4x-10)^{\frac{1}{3}} + (3\text{x}-5).\frac{4}{3}(4x-10)^{-\frac{2}{3}}$

$f'(x) = (4x-10)^{\frac{1}{3}}(3 + \frac{4}{3}(3x-5)(4x-10)^{-1})$

C. Rangkuman

Berdasarkan paparan di atas, berikut merupakan rumus-rumus umum turunan yang dapat Ananda ingat dan gunakan dalam menyelsaikan soal turunan. Misalkan f , u, v adalah fungsi bernilai real dan dapat diturunkan di interval I dan a adalah bilangan real, maka:

1. $f(x) = a \rightarrow f'(x) = 0$
2. $f(x) = ax \rightarrow f'(x) = a$
3. $f(x) = ax^n \rightarrow f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$
4. $f(x) = au(x) \rightarrow f'(x) = au'(x)$
5. $f(x) = u(x) \pm v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$
6. $f(x) = u(x)v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
7. $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} \rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$

D. Latihan Soal

Jawablah pertanyaan di bawah ini dengan benar dan teliti yaa

1. Jika diketahui $f(r) = 2r^{\frac{3}{2}} - 2r^{\frac{1}{2}}$, maka nilai dari $f'(1) = \cdots$

2. Sebuah persegi dengan sisi x memiliki luas $f(x)$. Nilai $f'(6) = \cdots$
   Jawab:

3. Besar populasi di suatu daerah t tahun mendatang ditentukan oleh persamaan $p(t) = 10^3t^2 - 5.10^2t + 10^6$. Laju pertumbuhan penduduk 5 tahun mendatang adalah..

4. Dua bilangan bulat m dan n memenuhi hubungan $2m - n = 40$. Nilai minimum dari $p = m^2 + n^2$ adalah ...

5. Diberikan fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$ Jika $f'(0) = 2, dan\ f(2) = 6$

   Tentukan nilai a, b dan c.

Pembahasan

Nomor	Pembahasan	Skoring
1	Diketahui $f(r) = 2r^{\frac{3}{2}} - 2r^{\frac{1}{2}}$, Dengan menggunakan aturan turunan dasar, maka turunan pertama dari fungsi $f(r)$ $adalah$ $$f'(r) = 2\frac{3}{2}r^{\frac{3}{2}-1} - 2\frac{1}{2}r^{\frac{1}{2}-1}$$ $$= 3r^{\frac{1}{2}} - r^{-\frac{1}{2}}$$ $$= 3\sqrt{r} - \frac{1}{r}$$ Untuk r = 1 maka $f'(1) = 3\sqrt{1} - \frac{1}{1} = 3 - 1 = 2$	20
2	Penyelesaian Luas Persegi diayatakan dengan sisi kali sisi maka $$f(x) = x.x = x^2$$ Dengan menggunakan rumus dasar turunan dieroleh $$f'(x) = 2x$$ Jadi nilai $f(6) = 2\ (6) = 12$	20
3	Penyelesaian $p(t) = 10^3t^2 - 5.10^2t + 10^6$ $turunan\ pertama\ dari\ p(t) adalah$ $p'(t) = 2.10^3t^{2-1} - 5.10^2$ Untuk t = 5 maka $p'(5) = 2.10^3.5 - 5.10^2 = 15\ .10^3 - 5.10^2$ $= 10.000 - 500 = 9.500$	20
4	Penyelesaian Diketahui $2m - n = 40$ Persamaan tersebut dapat ditulis menjadi $n = 2m - 40$ Karena $p = m^2 + n^2$ maka $$p = m^2 + (2m - 40)^2$$ $$p = m^2 + 4m^2 - 160m + 1600$$ $$p = 5m^2 - 160m + 1600$$	20

	Agar p minimum maka turunan pertama harus bernilai nol $p = 5m^2 - 160m + 1600$ $p' = 10m - 160 = 0$ $10m = 160 \leftrightarrow m = \frac{160}{10} = 16$ Jadi nilai p minimum adalah $p = 5(16)^2 - 160(16) + 1600 = 1280 - 2560 + 1600 = 320$	
5	Penyelsaian Diketahui $(x) = ax^2 + bx + c$ $f'(x) = 2\,ax + b$ Karena $f'(0) = 2\ maka\ 2a(0) + b = 2 \leftrightarrow b = 2$ dan $a = 1$ Karena $f(2) = 6\ maka\ f(2) = 1(2)^2 + 2(2) + c = 6$ $f(2) = 4 + 4 + c = 6$ $f(2) = 8 + c = 6\ maka\ c = -2$ Jadi nilai a, b dan c berturut – turut adalah $a = 1;\ b = 2\ dan\ c = -2$	20
SKOR TOTAL		100

E. Penilaian Diri

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan jujur dan bertanggung jawab!

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Ananda telah mampu memahami definisi turunan?		
2.	Apakah Ananda telah mampu menentukan turunan pertama fungsi aljabar linear?		
3.	Apakah Ananda telah mampu menentukan turunan pertama fungsi pecahan?		
4.	Apakah Ananda telah mampu menentukan turunan pertama dari fungsi berbentuk akar?		
5.	Aapakah Ananda mampu menentukan turunan fungsi dengan menggunakan aturan rantai?		
6.	Apakah Ananda telah mampu menyelesaikan soal yang berkaitan dengan turunan?		

EVALUASI

Pilih satu jawaban yang paling tepat (Sebaiknya Ananda kerjakan di buku latihan, tanyakan kepada guru Ananda apabila terdapat materi atau soal yang belum Ananda pahami)

1) Turunan Pertama dari $f(x) = (2-6x)^3$ $adalah\ f'(x) = \cdots$

   A. $-18\,(2-6x)^2$

   B. $-\frac{1}{2}\,(2-6x)^2$

   C. $3\,(2-6x)^2$

   D. $18\,(2-6x)^2$

   E. $-\frac{1}{2}\,(2-6x)^2$

   Jawab: A

2) Diketahui $f(x) = (2x-3)^4$; $f'(x)merupakan\ turunan\ pertama\ dari\ f(x)$. Nilai dari $f'(3) = \cdots$

   A. 24

   B. 36

   C. 72

   D. 108

   E. 216

   Jawab: E

3) Persamaan garis singgung kurva $y = 5x^2 + 2x - 12$ di titik (2, 12) adalah

   A. $y = 32 - 22x$

   B. $y = 22x - 32$

   C. $y = 22x - 262$

   D. $y = 22x - 42$

   E. $y = 22x + 32$

   Jawab: B

4) Jika $f(x) = \frac{x^2-3x}{x^2+2x+1}$, maka $f'(2)$ = ….

A. $\frac{2}{9}$

B. $-\frac{1}{9}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{7}{27}$

E. $\frac{7}{4}$

Jawab : D

5) Persamaan garis singgung pada kurva $y = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$ di titik yang berabsis 1 adalah ...

A. $5x + y + 7 = 0$

B. $5x + y + 3 = 0$

C. $5x + y - 7 = 0$

D. $3x - y - 4 = 0$

E. $3x - y - 5 = 0$

Jawab : C

6) Garis l menyinggung kurva $y = 6\sqrt{x}$ di titik yang berabsis 4. Titik potong garis l dengan sumbu x adalah ...

A. (4,0)

B. (- 4, 0)

C. (12, 0)

D. (- 6, 0)

E. (6, 0)

Jawab : C

7) Diketahui $y = (x^2 + 1)(x^3 - 1)$, maka $y' = \cdots$

A. $5x^3$

B. $3x^3 + 3x$

C. $2x^4 - 2x$

D. $x^4 + x^2 - x$

E. $5x^4 + 3x^2 - 2x$

Jawab : E

8) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 10$ maka $f'(x) = \cdots$

A. $2x^2 - 3x + 1$

B. $6x^3 - 6x^2 + x$

C. $6x^2 - 6x - 10$

D. $6x^2 = 6x + 1$

E. $6x^2 - 6x + 9$

Jawab : C

9) Diketahui $f(x) = \frac{x^2+3}{2x+1}$. Jika $f'(x)$ menyatakan turunan pertama dari $f(x)$ maka $f(0) + 2\,f'(0) = \cdots$

A. – 10

B. – 9

C. – 7

D. – 5

E. – 3

Jawabn : B

10) Jika garis singgung kurva $y = x\sqrt{5-x}$ di titik (4, 4) memotong sumbu x di titik (a, 0) dan memotong sumbu y di titik (0, b), maka nilai a + b adalah ..

A. – 2

B. 0

C. 9

D. 16

E. 18

Jawab : D

11) Jika $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-3}$, maka turunan pertama dari fungsi $f\ di\ x = 3$ adalah $f'(3) = \cdots$

A. $-1\frac{1}{2}$

B. $-\frac{5}{6}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $-\frac{1}{2}$

E. $-\frac{1}{3}$

Jawab : D

12) Garis singgung pada kurva y = √x di titik P membentuk sudut 45° dengan sumbu-x positif, koordinat titik singgungnya adalah...
A. $(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$
B. $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$
C. $(-\frac{1}{4},\frac{1}{2})$
D. $(\frac{1}{4},-\frac{1}{2})$
E. $(-\frac{1}{4},-\frac{1}{2})$
Jawab: A

13) persamaan garis singgung kurva $y = \sqrt{x} - 2$ di titik potong kurva itu terhadap sumbu$x$ adalah...
A. $4x + 1$
B. $4x - 1$
C. $\frac{1}{4}x - 1$
D. $\frac{1}{4}x + 1$
E. $-\frac{1}{4}x - 1$
Jawab: C

14) Persamaan garis singgung kurva $y = 3 - x^2$ yang tegak lurus terhadap garis $4y = x + 1$ adalah
A. $y = 4x - 7$
B. $y = 4x + 7$
C. $y = -4x - 7$
D. $y = -4x + 7$
E. $y = -4x + 8$
Jawab: D

15) Persamaan garis singgung kurva $y = 2\sqrt{x}$ di titik dengan ordinat 2 adalah...
A. $y - x - 1 = 0$
B. $y - x + 1 = 0$
C. $y + x - 1 = 0$
D. $-y - x - 1 = 0$

E. $-y - x + 1 = 0$
Jawab: A

DAFTAR PUSTAKA

Erlangga Fokus UN SMA/MA 2013 Program IPA. (2012). Jakarta: Erlangga.

Erlangga X-Press UN 2015 SMA/MA Program IPA. (2014). Jakarta: Erlangga.

Matematika Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan (2014). Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Siswanto. (2005). *Matematika Inovatif: Konsep dan Aplikasinya*. Solo: Tiga Serangkai Pustaka Mandiri.

Willa Adrian. (2008). *1700 Bank Soal Bimbingan Pemantapan Matematika Dasar*. Bandung: Yrama Widya.

https://smatika.blogspot.com/2016/04/persamaan-garis-singgung-kurva_6.html

https://www.zenius.net/prologmateri/matematika/a/1222/Cara-Mencari-Titik-Singgung